

Pénzügyi feladatok

2023

<https://szamitasok.hu/kalkulatorok/kamatos-kamat-kalkulator>

Százalékszámítás

- **Egy számnak az 1%-a az az egy századrészét jelenti.**
- Ha egy A számnak keressük a p %-át, akkor az A -t alapnak, a p -t százaléklábnak, az eredményt (s) százalékértéknek nevezzük.
- **A százalékszámításnál használható képletek:**

$$\text{Százalékérték kiszámítása: } s = \frac{A}{100} \cdot p .$$

$$\text{Százalékláb kiszámítása: } p = \frac{s}{A} \cdot 100 .$$

$$\text{Alap kiszámítása: } A = \frac{s}{p} \cdot 100 .$$

Banki számítások

*A használatba adott pénzt **tőkének** nevezzük, a használatért járó díjat pedig **kamatnak**. A pénz használatáért járó díj megadásakor a százalékláb helyett a **kamatláb** kifejezés is gyakori.*

A:tőke ; p: kamatláb ; é: jövőbeni érték; n: futamidő

rejtélyes betűkombinációknak: THM vagy EBKM:

*THM: **teljes hiteldíjmutató**, amely nagyjából azt mutatja meg, mennyibe kerül valójában a hitel. Ez a szám a hitel kamatánál általában jóval nagyobb szám, hiszen a hitelen kívül megfizetjük az elbírálási költséget, a kezelési költséget, az éves zárási költségeket és esetleg egyéb banki költségeket.*

*EBKM: **egységesített betétikamatláb-mutató**. Az éves banki kamatlábak általában 360 napra vetítve kerülnek megállapításra, s egy évnél rövidebb futamidő esetén a kamat visszaforgatását, tőkésítését nem veszik figyelembe, addig az EBKM egy adott év, azaz 365 nap elteltével mutatja az elhelyezett betét után fizetendő kamatösszeg nagyságát.*

Jövőbeni érték

50 000 forintot szeretnénk 7 évre befektetni. Három befektetés közül választhatunk:

a) minden év végén hozzátesznek a pénzünkhöz egy fix összeget, 7500 forintot, ami az eredeti összeg 15%-a;

= $7 \cdot 7500$ Ft = 52500 Ft Teljes pénz: 102 500 Ft

b) 11%-os kamatos kamatot fizetnek;

= $1,11^7$ = 2,076-szorosa lesz, ami 103 808 Ft

c) az első évben 17% kamatot kapunk, majd évente 2%-kal csökken a kamat, míg eléri a 7%-ot, és ennyit kamatozik az utolsó évben is.

= $1,17 \cdot 1,15 \cdot 1,13 \cdot 1,11 \cdot 1,09 \cdot 1,072$ = 2,106-szorosa lesz, azaz 105 505 Ft

GYŰJTŐJÁRADÉK

Ha öt éven keresztül minden hónap elején beteszünk a bankba 30 000 Ft-ot, akkor mennyi pénzünk lesz az ötödik év végén? A bank a havonta lekötött pénzünkre minden hónapban 0,1% kamatot fizet.

- $5 \cdot 12 = 60$ hónapon keresztül kamatozik a pénz
- A havi kamat $p = 0,1\%$. A havi kamattényező $q = 1 + p / 100 = 1,001$.

$$t_n = t_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = t_0 q^n,$$

$$T = tq^{60} + tq^{59} + tq^{58} + \dots + tq.$$

- Ez egy mértani sorozat, aminek első tagja: $30000 \cdot 1,001$, kvóciens: 1,001
- Összesen 60 hónap múlva:

$$T = tq \frac{q^{60} - 1}{q - 1} \approx 1\,856\,000 \text{ Ft.}$$

ÉVES TÖRLESZTŐRÉSZLET, ÉVEN BELÜLI TŐKÉSÍTÉS

Féléves tőkésítés esetében a félév végén és az év végén is jóváírjuk a kamatot. Ilyenkor az éves kamat felével számolunk mindkétszer. Havi tőkésítés esetében egy évben 12-szer írjuk jóvá a kamatot, de az éves kamat 1/12 részével számolunk.

Melyik befektetés a legelőnyösebb? A pénzösszeg nagysága év végén:

a) A befektetett pénzünk évi 21%-ot kamatozik, és évenként tőkésítenek.

$$1,21$$

a) b) A befektetett pénzünk évi 20%-ot kamatozik, és félévenként tőkésítenek.

$$\left(1 + \frac{0,2}{2}\right)^2 = 1,21$$

b) c) A befektetett pénzünk évi 19,5%-ot kamatozik, és havonta tőkésítenek.

$$\left(1 + \frac{0,195}{12}\right)^{12} \approx 1,2134$$

c) d) A befektetett pénzünk évi 20%-ot kamatozik, és naponta tőkésítenek.

$$\left(1 + \frac{0,2}{365}\right)^{365} \approx 1,2213$$

BANKI KAMAT (ráta), INFLÁCIÓ, PÉNZROMLÁS MÉRTÉKE

Mi az **infláció**? Az árak széles körű emelkedése

Inflációról akkor beszélünk, ha nem csak egy terméknek az ára emelkedik meg, hanem sokféle árué és szolgáltatásé egyidejűleg, azaz az infláció idővel csökkenti a fizetőeszköz értékét.

Az inflációs **rátát** általában az előző év azonos időszakához viszonyítva adják meg. Az infláció nem feltétlenül rossz a gazdaság szempontjából. A kiszámíthatóan alacsony infláció (2% körül) kifejezetten jó növekedésösztönző.

Az infláció ellentéte a **defláció**, ami az árak széles körű csökkenését jelenti.

Feladat

Három testvér egy általuk örökölt ingatlan eladásából fejenként 10 millió Ft készpénzhez jutott. Mindhárman úgy gondolták, hogy a pénzt megtartják, és igyekeznek annak befektetése révén reálkamatra szert tenni.

Imre ötéves Magyar Állampapírt vásárolt, fix évi 5%-os kamatozással. A vásárlás évében 2% volt az infláció, és kedvezőnek tűntek a kilátások a következő évekre is.

Tamás szintén állampapírt vásárolt, de ő a prémium változatot vásárolta, ami az éves infláció felett +1%-os kamatot biztosít évente. Tamás a biztonságra törekszik, azt szeretné, hogy mindenképpen minden évben a befektetés reálkamata pozitív legyen.

Szisi pedig úgy döntött, hogy eurót vásárol, és nyit egy devizaszámlát egy banknál, ahol évi 1% kamatot tud realizálni.

Hogyan alakultak a befektetések reálkamatai az ötödik év végén a kezdetekhez képest, ha az éves infláció rendre 2%, 2%, 4%, 6%, 7% volt?

Szisi 362 Ft-ért vásárolta az eurót, és az ötödik év végén 385 Ft-ért tudta volna átváltani Ft-ra.

Imrének az ötödik év végén $10 \cdot 1,05^5 = 12,76$ millió forintja van.

A 10 millió Ft-ért megvásárolható termékek ára az infláció következtében öt év után $10 \cdot 1,02 \cdot 1,02 \cdot 1,04 \cdot 1,06 \cdot 1,07 = 12,27$ millió Ft.

Ez azt jelenti, hogy ötéves viszonylatban a pénzéért megvásárolható termékek mennyisége $\frac{12,76}{12,27} \approx 1,04$ -szeresére nőtt. Ez négy százalékos reálkamat-növekedést jelent.

Tamás számláján öt év múlva $10 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,05 \cdot 1,07 \cdot 1,08 = 12,87$ millió Ft van.

Így ő $\frac{12,87}{12,27} \approx 1,049$ -szeresére növelte a megvásárolható termékek mennyiségét.

Ez 4,9%-os növekedést jelent.

Sziszzi $\frac{10\,000\,000}{362} = 27\,624,1$ eurót kapott a pénzéért.

Ez öt év alatt $27\,624,1 \cdot 1,01^5 \approx 29\,033,4$ euróra növekedett.

Ha ezt ekkor visszaváltotta volna forintra, akkor $29\,033,4 \cdot 385 \approx 11,178$ millió Ft-ja lenne.

Tehát a Sziszi által megvásárolható áruk mennyisége $\frac{11,178}{12,27} \approx 0,911$ -ed részére csökkent.

Ez 8,9%-os csökkenés. Ez tűnik messze a legrosszabb eredménynek.

A betét típusú befektetések

- **A betétek lekötés módja szerint :**

- **Látra szóló betétet:** pénzünk minden kötöttség nélkül bármikor betehető és felvehető
- **Határidős betétet:** amikor a bank csak bizonyos lekötési idő után fizet kamatot.

- **A betétek kamatozás szerint:**

- **Egyszerű** kamatozású: a kamat összegét nem adják hozzá a betéthez, azaz nem tőkésítik.
- **Kamatos kamat:** a kamatot tőkésítik, így a továbbiakban a kamattal növelt összeg kamatozik tovább.
- **Fix** kamatozású – a lekötés időtartama alatt a kamat nem változik, azaz a lekötött összeg egy előre meghatározott százaléka.
- **Változó** kamatozású – a kamat mértéke a lekötés időtartama alatt változhat.
- **Sávós** kamatozású - a lekötött összegben belüli különböző sávokban különböző a kamat mértéke, így pl. 5 millió forint lekötésekor 3 millió forintig 4%-ot, az e feletti két millió forintra 5%-ot fizet a bank.

GYŰJTŐJÁRADÉK

20 éven át minden év elején befizetünk a bankba 12 000 Ft-ot. A bank évi 6%-os kamatos kamatot ad a betétünkre. Hány forintunk lesz a 20 év elteltével a számlánkon?

$$12000 \cdot 1,06^{20} + 12000 \cdot 1,06^{19} + 12000 \cdot 1,06^{18} + \dots + 12000 \cdot 1,06$$

a sorozat első tagja $12000 \cdot 1,06$, hányadosa $1,06$. A keresett összeg:

$$12000 \cdot 1,06 \cdot \frac{1,06^{20} - 1}{1,06 - 1} \approx 467913 \text{ Ft}$$

Tételezzük fel, hogy minden évben 3%-os az infláció.

$$12000 \cdot 1,06^{20} + 12000 \cdot 1,03 \cdot 1,06^{19} + 12000 \cdot 1,03^2 \cdot 1,06^{18} + \dots + 12000 \cdot 1,03^{19} \cdot 1,06 =$$
$$12000 \cdot 1,06 \cdot (1,06^{19} + 1,03 \cdot 1,06^{18} + 1,03^2 \cdot 1,06^{17} + \dots + 1,03^{19}) =$$

$$12000 \cdot 1,06 \cdot \frac{1,06^{20} - 1,03^{20}}{1,06 - 1,03} \approx 594034$$

Életjáradék: Az összegyűjtött pénz kifizetésének egy lehetséges módja

Beteszünk a bankba 4 000 000 Ft-ot, és szeretnénk minden év elején ebből ugyanakkora összegeket kapni 20 éven át. A bank a mindenkor bent lévő összegre évi 5%-os kamatos kamatot ad. Mekkora összeget tudunk kivenni minden év elején?

$$\left((4000000 - x) \cdot 1,05 - x \right) \cdot 1,05 - x = 4000000 \cdot 1,05^{19} - x \cdot (1,05^{19} + 1,05^{18} + 1,05^{17} + \dots + 1,05 + 1) = 0$$

$$4000000 \cdot 1,05^{19} = x \cdot (1,05^{19} + 1,05^{18} + 1,05^{17} + \dots + 1,05 + 1)$$

$$4000000 \cdot 1,05^{19} = x \cdot \frac{1,05^{20} - 1}{1,05 - 1}$$

$$x = \frac{4000000 \cdot 1,05^{19} \cdot 0,05}{1,05^{20} - 1} = 305686$$

GYŰJTŐJÁRADÉK ÉS ÉLETJÁRADÉK KOMBINÁCIÓJA

25 éves korában kezdje el fizetésének 10%-át gyűjteni, pl. tehát 40 éven át havi 20 000, azaz évi 240 000 Ft-ot tesz be a biztosítóhoz, hogy majd nyugdíjat kapjon belőle.

A hosszú távú befektetések kamata évi 5% (éves betéttel, és éves kamatjováírás)

$$240000 \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{40}-1}{1,05-1} \approx 30\,441\,543 \text{ Ft}$$

Ezt a pénzt szeretnénk nyugdíj formájában megkapni. A bank egy jelképes, 2%-os technikai kamattal számoljon, és 20 évre szeretnénk életjáradékot kapni.

$$x = \frac{30441543 \cdot 1,02^{19} \cdot 0,02}{1,02^{20}-1} = 1\,825\,200$$

a havi összeg 152 100 Ft